J'intègre MP-MP* p 607-609
Bibmath

220
221
243

Développement : Résolution d'une EDL avec les séries entières.

Théorème : Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Démo :

ORAL

L'idée est de former une équation différentielle vérifiée par f, on cherche ensuite les fonctions solutions de cette équation différentielle qui sont développables en série entière et on conclut par unicité au problème de Cauchy

1. Puisque arcsin est C^∞ sur $]-1,1[$ et cos C^∞ sur $\mathbb{R}$, f est C^∞ par composition.
On peut dériver f deux fois, pour tout $t \in]-1,1[$:

$$f'(t) = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin(t))$$

$$f''(t) = \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin(t)) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}\,(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin(t))$$

et on rappel que $f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t))$
On combine d'abord f et f'' pour éliminer les termes en $\cos(\alpha \arcsin(t))$ puis on ajoute les termes en f' nécessaires pour éliminer les termes en $\sin(\alpha \arcsin(t))$.
Au final, on trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0 \qquad (E).$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Alors y' est somme de $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} t^n$ et y'' est somme de $\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n$ sur $]-R,R[$.
Ainsi pour tout $t \in]-R,R[$:

$$(1-t^2) f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)(n+2) a_{n+2} - n(n-1) a_n\right) t^n$$

$$t f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n$$

et $$\alpha^2 f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n t^n$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto (1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y$ est donc somme de la série entière : $\sum_{m \geq 0} ((m+1)(m+2)a_{m+2} + (-m(m-1) - m + \alpha^2) a_m) t^m$ sur $]-R, R[$.

Par unicité du DSE, y est solution de E ssi :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (m+1)(m+2) a_{m+2} = (m^2 - \alpha^2) a_m$$

Puisque $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$, on en déduit que $a_{2p+1} = 0$ pour tout p et que

⚠ A vérifier absolument !!!

$$a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p)!} \left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-1)^2 \right) \left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-2)^2 \right) \cdots \left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

3 • Dans le cas où $\alpha \in 2\mathbb{Z}$, les coefficients sont nuls APCR et la somme de la série obtenue est polynomiale.

Le faire

• Sinon, la règle de d'Alembert montre que la série entière $\sum a_{2m} t^{2m}$ a un rayon de convergence égal à 1.

Dans les deux cas, la fonction somme définie par cette série sur $]-1, 1[$ est solution du problème de Cauchy cité ci-dessus et est donc égale à la fonction f.

Rapport avec les pol de Tchebychev ?

<u>Remarque</u> : Dans le cas où $\alpha \in 2\mathbb{Z}$, la fonction f est polynomiale, ce qui s'explique par le fait que $\cos(\alpha\theta)$ est un polynôme pair en $\cos\theta$, donc un polynôme en $\sin\theta$.

A savoir faire !

On a un deuxième exemple p.609. Cette fois ci on sait que f est développable en série entière : on cherche une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement (unicité du DSE) pour déterminer ces derniers.